

От противного

Примеры. 1. Можно ли разложить 44 шарика на 9 непустых кучек так, чтобы количество шариков в разных кучках было различным?

2. Девять чисел таковы, что сумма любых четырех из них меньше суммы пяти остальных. Докажите, что все числа положительны.

3. Семь грибников собрали вместе 59 грибов, причем любые двое собрали разное количество. Докажите, что какие-то три грибника собрали вместе не менее 33 грибов.

1. (письменно) Отрицание общего высказывания – высказывание о существовании. Постройте отрицания:

- a) Все попугаи понимают то, что говорят.
- b) Все натуральные числа делятся на три.
- c) Ни один бегемот не умеет летать.
- d) Каждый мальчик умывается по утрам.

2. (письменно) Отрицание высказывания о существовании – общее высказывание. Постройте отрицания:

- a) Некоторые шестиклассники могут съесть три тарелки супа за обедом.
- b) Бывают преподаватели, которые спят по ночам.
- c) Некоторые последовательные натуральные числа имеют суммы цифр, являющиеся точными квадратами.
- d) Есть гитаристы, которые не умеют петь.

3. (письменно) Постройте отрицания:

- a) Существует наименьшее положительное число.
- b) В каждой корзинке не более 17 пирожков.
- c) Каждый день хотя бы одна мудрилка ходит в гости.
- d) Каждый день все школьники М6 решают все предложенные задачи.
- e) В таблице сумма в каждой строке и каждом столбце четна.
- f) В последовательности $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ для каждого $\epsilon > 0$ найдется такой номер n_0 , что при всех $n > n_0$ выполняется неравенство $|a_n| < \epsilon$.

4. Ученик за одну неделю получил 13 оценок (из набора 2, 3, 4, 5), среднее арифметическое которых — целое число. Докажите, что какую-то оценку он получил не более двух раз.

5. В клетках таблицы 10×10 расставлены числа $-1, 0, 1$. Могло ли оказаться, что все суммы чисел в строках, столбцах и главных диагоналях различны?

6. Есть 7 различных натуральных чисел, сумма которых равна 100. Докажите, что сумма некоторых трех из них не меньше, чем 50.

7. Семь различных целых чисел таковы, что сумма любых трех из них меньше суммы четырех остальных. Докажите, что все числа не меньше 10.

8. Числа от 1 до 50 написаны на карточках. Можно ли разложить эти карточки в 11 стопок так, чтобы в каждой стопке произведение чисел на карточках делилось на 9?

Дополнительные задачи

9. Можно ли 100 гирь массами $1, 2, 3, \dots, 99, 100$ разложить на 10 кучек разной массы так, чтобы выполнялось условие: чем тяжелее кучка, тем меньше в ней гирь?

10. В классе учится 30 учеников, один из них – Вася. Каждый из Вашины одноклассников имеет ровно 5 общих друзей с Васей. Докажите, что в классе есть ученик с нечетным числом друзей.

11. На Дэнс-шоу пришли 125 человек, причем каждый был знаком ровно с 10 другими. После третьего тура некоторые не прошли в финал и ушли пить кефир на вечерний чай. Оказалось, что оставшиеся по-прежнему имели одинаковое число знакомых среди оставшихся в зале. Докажите, что среди ушедших были знакомые друг с другом.

От противного

Примеры. 1. Можно ли разложить 44 шарика на 9 непустых кучек так, чтобы количество шариков в разных кучках было различным?

2. Девять чисел таковы, что сумма любых четырех из них меньше суммы пяти остальных. Докажите, что все числа положительны.

3. Семь грибников собрали вместе 59 грибов, причем любые двое собрали разное количество. Докажите, что какие-то три грибника собрали вместе не менее 33 грибов.

1. (письменно) Отрицание общего высказывания – высказывание о существовании. Постройте отрицания:

- a) Все попугаи понимают то, что говорят.
- b) Все натуральные числа делятся на три.
- c) Ни один бегемот не умеет летать.
- d) Каждый мальчик умывается по утрам.

2. (письменно) Отрицание высказывания о существовании – общее высказывание. Постройте отрицания:

- a) Некоторые шестиклассники могут съесть три тарелки супа за обедом.
- b) Бывают преподаватели, которые спят по ночам.
- c) Некоторые последовательные натуральные числа имеют суммы цифр, являющиеся точными квадратами.
- d) Есть гитаристы, которые не умеют петь.

3. (письменно) Постройте отрицания:

- a) Существует наименьшее положительное число.
- b) В каждой корзинке не более 17 пирожков.
- c) Каждый день хотя бы одна мудрилка ходит в гости.
- d) Каждый день все школьники М6 решают все предложенные задачи.
- e) В таблице сумма в каждой строке и каждом столбце четна.
- f) В последовательности $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ для каждого $\epsilon > 0$ найдется такой номер n_0 , что при всех $n > n_0$ выполняется неравенство $|a_n| < \epsilon$.

4. Ученик за одну неделю получил 13 оценок (из набора 2, 3, 4, 5), среднее арифметическое которых — целое число. Докажите, что какую-то оценку он получил не более двух раз.

5. В клетках таблицы 10×10 расставлены числа $-1, 0, 1$. Могло ли оказаться, что все суммы чисел в строках, столбцах и главных диагоналях различны?

6. Есть 7 различных натуральных чисел, сумма которых равна 100. Докажите, что сумма некоторых трех из них не меньше, чем 50.

7. Семь различных целых чисел таковы, что сумма любых трех из них меньше суммы четырех остальных. Докажите, что все числа не меньше 10.

8. Числа от 1 до 50 написаны на карточках. Можно ли разложить эти карточки в 11 стопок так, чтобы в каждой стопке произведение чисел на карточках делилось на 9?

Дополнительные задачи

9. Можно ли 100 гирь массами $1, 2, 3, \dots, 99, 100$ разложить на 10 кучек разной массы так, чтобы выполнялось условие: чем тяжелее кучка, тем меньше в ней гирь?

10. В классе учится 30 учеников, один из них – Вася. Каждый из Вашины одноклассников имеет ровно 5 общих друзей с Васей. Докажите, что в классе есть ученик с нечетным числом друзей.

11. На Дэнс-шоу пришли 125 человек, причем каждый был знаком ровно с 10 другими. После третьего тура некоторые не прошли в финал и ушли пить кефир на вечерний чай. Оказалось, что оставшиеся по-прежнему имели одинаковое число знакомых среди оставшихся в зале. Докажите, что среди ушедших были знакомые друг с другом.